E.N.S. SAINT-CLOUD FONTENAY

OPTION MATH MATH 2

DURÉE : 4 heures

Une importance particulière sera attachée à la présentation et à la clarté des copies. Les parties I et II sont indépendantes.

I

Soit r un entier $r \geqslant 1$ et a un nombre réel strictement positif.

A

On considère une fonction f définie et de classe C^r sur l'intervalle $[0, a]$ qui vérifie

$$f(0) = 0,$$
$$f(x) < x \quad \text{pour} \quad x \in]0, a],$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x \in [0, a].$$

1° Montrer que l'on a $f'(0) \leqslant 1$.

2° On définit une suite de fonctions f_n par $f_0(x) = x$ et $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que les fonctions f_n sont définies et de classe C^r sur l'intervalle $[0, a]$ et que leurs dérivées y sont strictement positives.

3° Montrer que la suite f_n converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $[0, a]$.

B

4° Soient λ un nombre réel dans l'intervalle $]0, 1[$ et h_1 une fonction continue strictement croissante sur $[\lambda, 1]$ qui vérifie

$$h_1(\lambda) = f(a),$$
$$h_1(1) = a.$$

Montrer qu'il existe une fonction h, unique, sur l'intervalle $]0, 1]$ telle que

(i) $h(x) = h_1(x)$ pour $x \in [\lambda, 1]$,

(ii) $h(x) \in]0, a]$ pour $x \in]0, 1]$,

(iii) $h(\lambda x) = f(h(x))$ pour $x \in]0, 1]$.

Montrer que h est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, 1[$ et que l'on a $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$.

5° Montrer que si $\dfrac{h(x)}{x}$ admet une limite (finie) non nulle en 0, on doit avoir $\lambda = f'(0)$.

C

6° On se donne $\lambda \in]0, 1[$. Soient g, h deux fonctions définies, continues et strictement croissantes sur l'intervalle $[0, 1]$ qui vérifient

(i) $h(0) = g(0) = 0$, $h(1) = g(1) = a$.

(ii) Pour tout $x \in [0, 1]$ on a $h(\lambda x) = f(h(x))$, $g(\lambda x) = f(g(x))$.

On pose $K(x) = g^{-1}(h(x))$ pour $x \in [0, 1]$.

a. Montrer que K est définie, continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ et que l'on a $K(\lambda x) = \lambda K(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

b. Si K est dérivable en 0, montrer que $K(x) = x$.

c. Montrer qu'il existe des fonctions K continues, strictement croissantes sur $[0, 1]$ qui vérifient $K(0) = 0$, $K(1) = 1$ et $K(\lambda x) = \lambda K(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$, mais qui sont différentes de la fonction $x \longmapsto x$.

D

Dans cette partie, on suppose que $\lambda = f'(0) \in]0, 1[$ et que f est de classe C^r et $r \geqslant 2$.

7° Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $x \in [0, a]$ et tout entier $n \geqslant 0$ on ait

$$f_n(x) \leqslant c(\lambda + \varepsilon)^n x.$$

8° Soit ψ la fonction définie sur l'intervalle $[0, a]$ par $\psi(0) = 0$ et $\psi(x) = \log \dfrac{f(x)}{\lambda x}$ pour $x \in]0, a]$.

a. Montrer que ψ est de classe C^1 sur $[0, a]$.

b. Montrer que la série $\sum_{i \geqslant 0} \psi \circ f_i$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, a]$. Soit Ψ sa somme.

c. On pose $g(x) = x \exp \Psi(x)$ pour $x \in [0, a]$. Montrer que $g(f(x)) = \lambda g(x)$ pour tout $x \in [0, a]$.

d. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c' > 0$ telle que l'on ait pour tout $x \in [0, a]$ et tout entier $i \geqslant 0$

$$f_i'(x) \leqslant c'(\lambda + \varepsilon)^i.$$

e. Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $[0, a]$ et que sa dérivée y est strictement positive.

Tournez la page S. V. P.

page 40 1986 ENS Saint-Cloud--Fontenay Option Mathématiques.Math 2

E

9° On définit une fonction f sur l'intervalle $[0, a]$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \lambda x \left(1 - \frac{1}{\log x}\right) \quad \text{pour} \quad x \in]0, a].$$

On suppose que λ et a sont tels que $0 < f(x) < x$ pour $x \in]0, a]$.

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, a]$, que sa dérivée y est strictement positive et que l'on a $f'(0) = \lambda$.

b. Montrer que $\lambda^{-n} f_n(a)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Soit b un nombre strictement positif. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $h : [0, b] \longrightarrow [0, a]$, dérivable en 0, telle que $h(\lambda x) = f(h(x))$.

II

Étant donné une fonction de variable réelle v, de classe C^∞ au voisinage de 0, on lui associe une série entière $\Sigma v_n z^n$ dite développement de Taylor de v en zéro définie par

$$v_0 = v(0), \quad v_i = \frac{v^{(i)}(0)}{i!}.$$

On considère dans cette partie un polynôme à coefficients complexes

$$P(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i x^i \quad (P(0) = 0).$$

1° Soit une série entière $h(z) = \sum_{i \geqslant 0} h_i z^i$ telle que $h(0) = 0$. Montrer que $\sum_{i=1}^{N} a_i (h(z))^i$ est une série entière $\sum_{i \geqslant 1} b_i z^i$ dont le disque de convergence contient celui de h. Montrer que l'on a pour tout entier $i \geqslant 1$:

$$b_i = \sum_{k=1}^{\inf(i, N)} a_k \left(\sum_{j_1 + \ldots + j_k = i, j_p \geqslant 1} h_{j_1} \ldots h_{j_k} \right).$$

2° Soit c un nombre réel strictement positif. On considère la fonction v définie dans un voisinage de 0 par

$$v = \frac{1}{2(1+c)} \left(1 + x - \sqrt{1 - 2(1+2c)x + x^2}\right).$$

a. Montrer que v est de classe C^∞ au voisinage de 0.

b. On note $\Sigma v_n z^n$ le développement de Taylor de v en 0. Montrer que $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et que la série entière $\Sigma v_n z^n$ converge pour

$$|z| < (\sqrt{c} + \sqrt{1+c})^{-2}.$$

(On pourra décomposer le radical en facteurs du premier degré.)

c. Montrer que la fonction v vérifie pour x dans un voisinage de 0

$$\frac{c\, v(x)^2}{1 - v(x)} = v(x) - x.$$

d. En déduire que l'on a pour $n \geqslant 2$

$$v_n = c \sum_{k \geqslant 2} \sum_{\substack{j_1 + \ldots + j_k = n \\ j_p \geqslant 1}} v_{j_1} \ldots v_{j_k}.$$

3° On pose $a_1 = \lambda$ et on suppose $|\lambda| \neq 1, 0$. On définit une suite $(h_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres complexes par la relation de récurrence : $h_1 = 1$ et, pour $i \geqslant 2$

$$h_i = \frac{1}{\lambda^i - \lambda} \sum_{k=2}^{\inf(i, N)} a_k \left(\sum_{j_1 + \ldots + j_k = i, j_p \geqslant 1} h_{j_1} \ldots h_{j_k} \right).$$

Montrer que l'on peut choisir le nombre réel c de la question 2° de façon à avoir pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|h_n| \leqslant v_n.$$

4° Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\Sigma_{n \geqslant 1} h_n z^n$ est strictement positif. On note h la somme. Montrer que la fonction h vérifie au voisinage de l'origine

$$P(h(x)) = h(\lambda x).$$